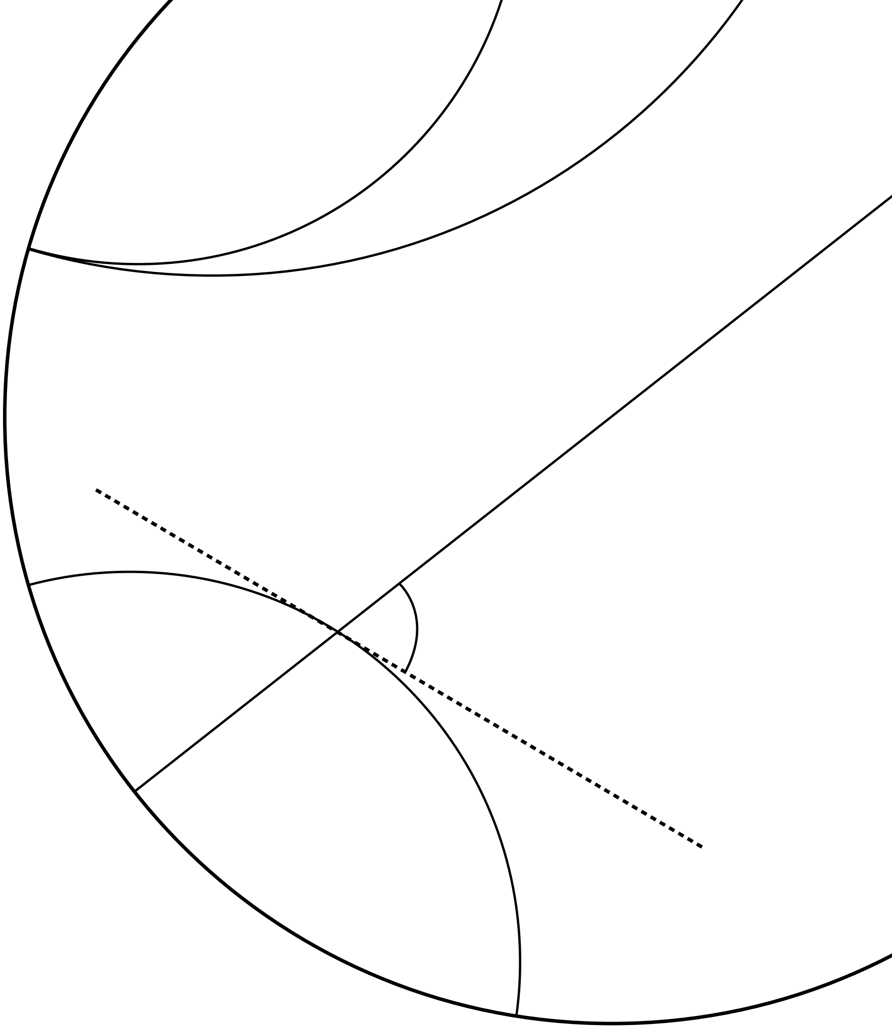


Ivan Andreoni

Le geometrie non euclidee

Tesina di Maturità - Anno Scolastico 2015/2016

Introduzione

Cos'è la geometria? Il lato più concreto della matematica, secondo alcuni. Un gioco costruito intorno a regole arbitrarie secondo altri. Queste due correnti di pensiero permasero in tutta la storia della geometria: da una parte, chi riteneva che la geometria dovesse fondarsi su intuizioni a priori, legate alla realtà o comunque al modo umano di intendere lo spazio fisico, dall'altra chi vedeva la geometria come un edificio puramente astratto costruito intorno a regole poste arbitrariamente. Queste due teorie sono in realtà entrambe valide: le basi sono sì poste arbitrariamente, ma seguendo comunque una ragionevolezza e un legame con la realtà empirica. Se però si considerano le basi unicamente come regole poste arbitrariamente, diventa legittimo chiedersi cosa succeda quando si cambiano le regole.

Questa tesina vuole analizzare le geometrie non euclidee, il risultato del cambiamento di alcune regole del gioco: il loro sviluppo storico, le loro caratteristiche, le loro ripercussioni filosofiche e la loro utilità nella fisica.

La trattazione di queste geometrie risulta interessante per diversi motivi: prima di tutto, sono un esempio di modello astratto, costruito intorno a basi apparentemente irragionevoli (la non esistenza o la non unicità della parallela), e dimostrano come la verità logica possa esistere anche al di là della ragionevolezza. Inoltre, si collocano in un contesto storico caratterizzato dalla caduta delle certezze, e in qualche modo anticipano la crisi della fisica classica, con tutte le ripercussioni filosofiche del caso. Infine, per il loro primo sviluppo e le ripercussioni pratiche che ebbero successivamente, sono un buon esempio di cosa può essere la matematica.

Questa tesina è divisa in 6 sezioni, di cui ora è presentato in breve il contenuto.

Metodo assiomatico e dimostrazioni del V postulato

In questa sezione viene affrontato il metodo assiomatico, ovvero il metodo con cui è sviluppata la geometria. Vengono poi affrontati i problemi legati al V postulato di Euclide ed alcuni dei suoi tentativi di dimostrazione.

La nascita delle geometrie non euclidee

In questa sezione si affronta lo sviluppo storico delle geometrie non euclidee: dai primi tentativi, sviluppati intorno al considerare la geometria iperbolica come legittima e non contraddittoria, alle prime pubblicazioni, a opera di Lobačevskij e Bolyai, in cui la geometria iperbolica viene considerata un sistema a sé stante paragonabile a quella euclidea, fino alle analisi di Riemann sulla curvatura dello spazio e la nascita della geometria ellittica.

La geometria iperbolica

In questa sezione si analizzano alcune delle proprietà della geometria iperbolica, quella geometria dove non si verifica l'unicità della parallela. In seguito, vengono tracciati dei legami fra geometria euclidea e iperbolica, mostrando come la prima sia un caso particolare della seconda.

Metodi di rappresentazione

In questa sezione si propongono alcuni metodi che permettono di rappresentare nello spazio euclideo la geometria non euclidea, e il ruolo che questi modelli hanno nel dare pari dignità alla geometria non euclidea ed euclidea.

Fisica

In questa sezione si mostrerà come le geometrie non euclidee possano aiutare a elaborare il modello matematico dietro alla relatività generale.

Conclusioni

Le conclusioni, in cui si espongono alcune considerazioni riguardo il significato delle geometrie non euclidee, e si prendono queste come esempio per parlare del ruolo della matematica, a metà fra scienza e filosofia.

Il metodo assiomatico e le dimostrazioni del V postulato

La scienza e la matematica hanno la fama di fornire conoscenze certe. Se da una parte ciò non è vero - e l'evoluzione della scienza nel corso della storia, che ha spesso portato alla revisione di teorie precedentemente accettate ne è una prova, mentre in matematica il concetto di verità è meno scontato di quanto si possa pensare - dall'altra, la scienza e la matematica sono strutturate secondo un metodo rigoroso, che vuole fornire conoscenze meno nebulose possibili. Fin dall'antichità, si è cercato un metodo con cui ottenere delle conoscenze certe, e il metodo tracciato da Aristotele nella *Logica*, un metodo deduttivo, è uno dei più celebri. Secondo questo metodo, le proposizioni (ovvero affermazioni, che possono essere vere o false) sono legate fra loro da sillogismi (ovvero procedimenti, che possono essere corretti o scorretti). Negli *analitici primi*, Aristotele analizza i diversi tipi di sillogismo, distinguendo quelli corretti da quelli scorretti. Tuttavia, la correttezza del ragionamento non implica la verità delle conclusioni (e viceversa), che è determinata anche dalla verità delle premesse: se si afferma che "tutti gli animali sono immortali" e che "gli uomini sono animali", si può correttamente dedurre che "tutti gli uomini sono immortali". Dunque, negli *analitici secondi*, vengono studiati i sillogismi scientifici, ovvero quei sillogismi che, partendo da premesse vere, permettono di raggiungere conclusioni vere. È evidente dunque la necessità di avere le 'premesse delle premesse': proposizioni che non vengono dimostrate, da cui vengono dedotte tutte le altre. Queste proposizioni prendono il nome di assiomi o postulati.

La natura di questi assiomi può essere interpretata in modo diverso: possono essere quelle verità auto evidenti, e per questo non dimostrabili, intorno alle quali costruire l'edificio del sapere, o possono essere le "regole di un gioco", poste non per descrivere qualcosa che abbia un riscontro nella realtà, ma per essere le basi su cui creare un edificio puramente intellettuale. Le geometrie non euclidee, ovvero sistemi che, pur essendo costruiti intorno alla negazione di un'affermazione ragionevole ed evidente (l'esistenza o l'unicità della parallela), non sono contraddittori, sono un esempio di ciò.

I sistemi costruiti in questo modo possono soffrire di tre problemi:

- Il problema della coerenza, o non contraddittorietà, che sorge laddove conseguenze tratte da diversi assiomi si rivelano essere in contraddizione fra loro;
- Il problema della reciproca indipendenza degli assiomi, ovvero il fatto che un assioma non possa essere dimostrato partendo dagli altri;
- Il problema della completezza, ovvero il fatto che gli assiomi di partenza debbano essere sufficienti per dimostrare tutte le proposizioni ammesse in una certa teoria.

Questi problemi possono essere ricondotti a un problema di non contraddittorietà. Un assioma A è indipendente da un sistema di assiomi S quando sono non contraddittori i sistemi formati unendo S e A oppure S e l'opposto di A. Un sistema di assiomi è invece completo quando, aggiungendo un nuovo enunciato che non sia logicamente derivabile, esso diventa contraddittorio. Vedremo come un'analisi di questi problemi sarà alla base dell'elaborazione di sistemi geometrici non euclidei.

La geometria Euclidea, ovvero quel sistema descritto da Euclide negli Elementi, è un esempio di sistema di questo tipo. All'inizio del primo libro, vengono elencati tre tipi di proposizioni: i termini, i postulati, e le nozioni comuni; i termini sono definizioni date con l'intento di 'far capire' di cosa si tratti, richiamandosi a nozioni di senso comune (come "la retta è lunghezza senza larghezza"). Le nozioni comuni (chiamate assiomi), sono otto affermazioni non dimostrate, che hanno però un valore generale e non limitato alla geometria (come "le cose uguali ad una stessa sono uguali fra loro" o "i doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro"). I postulati sono cinque affermazioni che, insieme agli assiomi, costituiscono la base del sistema:

1. Fra due punti distinti del piano passa sempre una retta.
2. Si può prolungare la retta oltre i due punti indefinitamente.
3. Dati un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
5. Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.

Partendo da questi postulati, posti sì in modo arbitrario, ma seguendo una forma di ragionevolezza, si dimostrano altre proposizioni tramite i teoremi, l'equivalente geometrico del sillogismo. Per esempio, vengono dimostrati i criteri di congruenza dei triangoli, i rapporti fra gli angoli interni ed esterni dei triangoli, la costruzione (e dunque l'esistenza) di una retta perpendicolare. Dalla proposizione 27 (se due rette qualsiasi tagliate da una trasversale formano con quest'ultima angoli alterni interni uguali, le due rette sono parallele) si inizia a trattare il parallelismo. È interessante notare come l'esistenza di una retta parallela a un'altra passante per un punto dato (proposizione 31) viene dimostrata senza utilizzare il V postulato, che viene usato in seguito per altre dimostrazioni.

Sebbene la geometria sviluppata a partire da questi postulati fu considerata un sistema 'corretto' e come tale fu usato nella storia della matematica, esso fu rivisto alla fine del XIX secolo, e si trovarono in esso alcune falle. Nonostante queste falle fossero sufficientemente marginali da non comprometterne la solidità sostanziale, rendevano necessaria tuttavia una revisione formale dei fondamenti della geometria, revisione che fu operata dal matematico tedesco David Hilbert (1862-1843) nei *Fondamenti della geometria* (1899). Dunque la geometria moderna non è fondata intorno alle proposizioni esposte da Euclide negli Elementi, ma intorno ai cinque gruppi di assiomi esposti in quest'opera. Tuttavia, non è necessario addentrarsi nell'entità di questi per comprendere lo sviluppo storico delle geometrie non euclidee né la loro entità, motivo per cui saranno in questa sede ignorati.

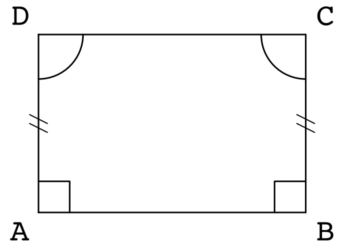
Per proseguire oltre nella storia della geometria euclidea e del V postulato è necessario introdurre il concetto di equivalenza fra due proposizioni. Questo concetto, considerando due proposizioni, P e Q, è relativo ad un sistema di assiomi S: P è equivalente a Q se partendo da S e P si può dimostrare Q e partendo da S e Q si può dimostrare P. Dunque è possibile trovare un postulato P equivalente al quinto se, considerando sempre i primi quattro, aggiungendo P si può dimostrare il V e viceversa.
Seguendo questo metodo non è difficile dimostrare l'equivalenza fra il quinto postulato e l'unicità della retta parallela, motivo per cui il V postulato viene detto anche postulato della parallela.

Essendo il V postulato non particolarmente evidente, a differenza degli altri quattro, nel corso della storia numerosi matematici si sono cimentati nel tentativo di dimostrarlo. Lo stesso Euclide, forse, tentò di dimostrarlo: osservando le sue proposizioni, si nota come egli tentò di dimostrare il più possibile senza far ricorso al V postulato, e si può ipotizzare che questo fu inserito fra i postulati solo una volta falliti i tentativi di dimostrazione. Nel tentare di dimostrarlo, numerosi matematici riuscirono soltanto a trovare ulteriori proposizioni equivalenti, fra cui alcune sono:

- Se una retta interseca una di due rette parallele, deve intersecare anche l'altra.
- Due rette parallele ad un terza sono parallele fra loro.

- Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta (se si considera la parallela come retta dalla distanza da un'altra retta costante).
- La somma degli angoli interni di un triangolo è di due retti.

Tutti i tentativi di dimostrare il quinto postulato partendo dagli altri quattro si rivelarono fallimentari. Fra questi, va menzionato il tentativo di dimostrazione operato da Girolamo Saccheri, gesuita che visse a cavallo fra XVII e XVIII secolo, tentativo che rappresentò una svolta per il modo con cui affrontò il problema, con una forma di dimostrazione per assurdo. Saccheri considera un quadrilatero birettangolo, ottenuto innalzando la base AB con segmenti perpendicolari di uguale lunghezza e unendo C con D. Dopo aver dimostrato alcune proprietà della figura (come l'uguaglianza fra gli angoli C e D, o il fatto che la lunghezza di CD rispetto ad AB dipende dall'angolo in C), si dimostra che se in un quadrilatero birettangolo gli angoli in C e D sono retti, acuti o ottusi, ciò vale per ogni quadrilatero birettangolo. Ciò significa che le tre ipotesi (chiamate dell'angolo ottuso, dell'angolo retto e dell'angolo acuto) si escludono a vicenda. In seguito, dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore, uguale o maggiore a due retti a seconda che valga l'ipotesi dell'angolo acuto, retto, o ottuso.



Dato che dal fatto che la somma degli angoli interno di un triangolo sia di due retti si può dimostrare il V postulato, Saccheri analizza i casi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso, con lo scopo di dimostrarli contraddittori, riuscendo a dimostrare la contraddittorietà dell'ipotesi dell'angolo ottuso. Tuttavia, per dimostrare la contraddittorietà dell'ipotesi dell'angolo acuto, da lui stesso riconosciuta "inimica", cade in errore, considerando rette che si intersecano all'infinito, e attribuendo a queste proprietà che valgono solo per le rette che si intersecano in un punto finito.

Il suo fallito tentativo di dimostrare la contraddittorietà dell'ipotesi dell'angolo acuto fu forse da spunto per chi continuò ad espandere quell'ipotesi[1], non trovando contraddizioni e formando un sistema a sé stante: la geometria iperbolica. Similmente, l'ipotesi dell'angolo ottuso, se si sostituisce anche il secondo postulato di Euclide, diventa non contraddittoria, ed è alla base della geometria ellittica.

Un altro tentativo di dimostrazione fu operato dal matematico svizzero Johann Heinrich Lambert (1728-1777), che considerò un quadrilatero con tre angoli retti e due lati congruenti e, similmente a Saccheri, studiò i tre casi dell'angolo ottuso, acuto o retto, dimostrando la contraddittorietà del primo ma riconoscendo egli stesso di non essere in grado di smentire il secondo. Nell'analizzare il caso dell'angolo acuto trovò tuttavia alcune proprietà interessanti, fra cui l'esistenza di un'unità di misura naturale dei segmenti: nella geometria euclidea la misura dei segmenti è arbitraria e convenzionale, mentre la misura degli angoli è in un certo senso naturale, essendo tutti gli angoli confrontabili con l'angolo giro. Nell'ipotesi dell'angolo acuto (e dunque nella geometria iperbolica) si può tracciare una connessione fra angoli e segmenti per cui ai segmenti si può estendere la naturale misura degli angoli.

1 - L'opera di Saccheri non è citata dai 'padri' della geometria non euclidea, fra cui Gauss, Bolyai e Lobačevskij, ma non è improbabile che essa fosse stata da loro conosciuta. Sarà Eugenio Beltrami, nella seconda metà del XIX secolo, a riscoprirlo e dargli il posto che si merita nella storia della geometria.

La nascita delle geometrie non euclidee

Fra la fine del XVIII secolo e l'inizio del XIX, l'estrema difficoltà con cui procedevano i tentativi di dimostrazione del V postulato, sempre falliti, fece emergere l'idea che non potesse essere dimostrato a partire dagli altri quattro. In diversi cominciarono dunque a convincersi della possibilità logica di una nuova geometria, e alcuni si cimentarono nell'approfondirla.

Uno di questi fu Ferdinand Karl Schweikart, che studiò la geometria da lui chiamata "astrale", dimostrando alcune proprietà (come il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo sia un angolo minore di due retti), e scoprendo l'esistenza di una costante C tale che l'altezza di un triangolo rettangolo isoscele è minore di C. La cosa interessante è che facendo tendere C a infinito, si rientra nella geometria euclidea: Schweikart è il primo a considerare la geometria euclidea un caso particolare della più generale geometria astrale. Esporrà i suoi risultati a Gauss nel 1818.

Un suo nipote, Franz Adolph Taurinus, operando in modo simile a Saccheri e Lambert, sviluppò le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso, individuando due diversi sistemi possibili, in seguito chiamati geometria iperbolica e geometria ellittica, con la geometria euclidea collocata in un punto intermedio.

Il grande matematico Karl Friedrich Gauss, pur non avendo pubblicato nulla al riguardo, studiò approfonditamente la questione delle parallele, convincendosi della non contraddittorietà della geometria non euclidea (ciò emerge dalla sua corrispondenza), e analizzandola abbastanza approfonditamente. Egli non pubblicò i suoi lavori principalmente per fattori culturali: da una parte, temeva "gli strilli dei beoti", ovvero di chi era troppo legato alla tradizione per poter ammettere un superamento della geometria euclidea come unico modello possibile, e di chi vedeva nella negazione del V postulato una cosa talmente irragionevole da non meritare attenzione. Dall'altra, egli stesso, pur riconoscendo la possibilità logica di queste geometrie, non le considera *vere*, poiché, a differenza dell'aritmetica, che tratta coi numeri, "prodotti puramente dal nostro spirito", la geometria tratta con lo spazio, che ha un'esistenza anche al di fuori della mente, ragione per cui non si possono dare regole arbitrarie.

Gauss ha dunque una posizione simile a quella espressa da Kant (che comunque non trattò delle geometrie non euclidee) nella *Critica della ragion pura* (1781): lo spazio è secondo il celebre filosofo Konigsberghese "rappresentazione a priori, necessaria, che sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne", intuito in un modo che è connaturale alla mente umana, ragion per cui, pur essendo possibile elaborare diversi modelli logicamente possibili, l'unica conoscenza scientifica è quella che riguarda l'unica possibile intuizione dello spazio, studiata tramite la geometria euclidea. La grande fama del filosofo tedesco contribuì a creare un clima sfavorevole alla diffusione delle geometrie non euclidee.

A essere considerati i padri della geometria non euclidea sono Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856) e Jànos Bolyai (1802-1860), che, indipendentemente l'uno dall'altro, quasi contemporaneamente, per primi pubblicarono i loro studi sulla geometria iperbolica.

Lobačevskij nelle sue opere non si limitò ad analizzare la questione delle parallele, ma tentò di rifondare globalmente la geometria. In particolare, nei *Nuovi principi della geometria*, esprime la sua posizione, diversa da quella di Kant, riguardo la geometria. Egli infatti la fa ricadere fra le scienze empiriche, e questa impostazione si ripercuote poi nella sua opera: come concetti primitivi considera quelli di corpo, contatto fra corpi, movimento rigido; le proposizioni primitive sono derivate da osservazioni sul comportamento dei corpi fisici. Procede poi per via dimostrativa a comporre quella che sarà successivamente chiamata geometria assoluta: quel sistema di proposizioni dimostrabili senza bisogno del V postulato né di sue negazioni. Successivamente, introduce una nuova nozione di retta parallela, e intorno a questa costruirà la geometria immaginaria (il modo in cui lui chiama la geometria iperbolica).

Bolyai, figlio di Wolfgang Bolyai, un amico con cui Gauss condivise degli studi sul parallelismo, in un'appendice ad un'opera didattica del padre, studia la geometria indipendentemente dalla verità o falsità del V postulato, dimostrando, come Lobačevskij, l'indipendenza dal V postulato di una serie di proprietà. Analizza poi il caso in cui il V postulato fosse considerato falso, raggiungendo notevoli risultati e dimostrando diverse proprietà.

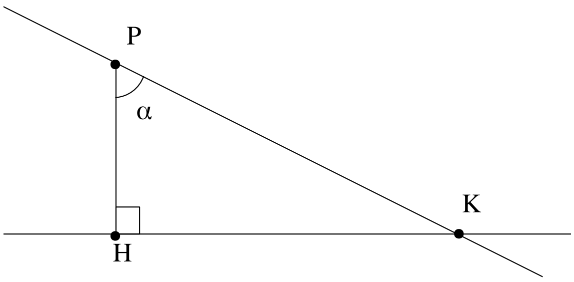
Un grande contributo fu inoltre quello dato da Riemann, allievo di Gauss, in *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, dissertazione scritta nel 1854 e pubblicata postuma nel 1867. Qui viene analizzata la curvatura delle superfici: una superficie di curvatura nulla è una superficie che può essere 'distesa' su un piano (come la superficie laterale di un cilindro), mentre, quando ciò non è possibile, la superficie ha una curvatura positiva (come su una sfera) o negativa (come una sella). Su queste superfici non è dunque possibile tracciare linee rette, ma solo 'geodetiche', linee che rappresentano il percorso più breve per collegare due punti. La cosa interessante è che sulle superfici di curvatura nulla vale la geometra euclidea, su quelle di curvatura negativa la geometria iperbolica (dunque esistono più parallele, e la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti), corrispondente all'ipotesi dell'angolo acuto, mentre sulle superfici a curvatura positiva vale la geometria ellittica (in cui non esistono rette parallele, e la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti), un'ipotesi dell'angolo ottuso leggermente modificata.

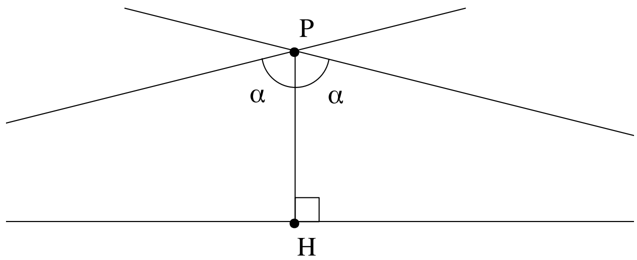
Ma Riemann estende oltre il ragionamento: queste proprietà non riguardano solo le superfici bidimensionali piegate nella terza dimensione, ma si possono estendere allo spazio, considerando la curvatura di questo. Il procedimento può poi essere generalizzato, applicandolo ad uno spazio n-dimensionale, che godrà di una certa curvatura. Dunque non solo nelle superfici, ma anche nello spazio, a seconda della curvatura può valere la geometria euclidea, iperbolica od ellittica.

La geometria iperbolica

Si procederà ora a trattare della geometria iperbolica, quel sistema geometrico corrispondente all'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri. Lo scopo di questa trattazione non è dare una conoscenza approfondita di questo modello, ma di far percepire le sue potenzialità.

Si consideri una retta r, un punto P esterno ad essa, una retta s passante per P, il segmento PH perpendicolare a r, il punto K l'intersezione fra s e r. Chiamando α l'angolo fra PH e s, si può osservare come, all'aumentare di questo, aumenti la distanza di K da H. Quando l'angolo α diventa ottuso, il punto K sarà dal lato opposto di H rispetto a quando l'angolo è acuto: esiste dunque un certo angolo per cui s smette di intersecare r verso destra, e inizia ad intersecarla verso sinistra. Nella geometria euclidea, quest'angolo è l'angolo retto, l'angolo per cui le due rette non hanno intersezioni. Nella geometria iperbolica, i possibili valori di α in modo che r e s non si intersechino sono molteplici. Viene detto angolo di parallelismo l'angolo minimo per cui r e s non si intersecano, parallele le due rette che formano l'angolo di parallelismo, verso destra e verso sinistra, con la perpendicolare, e iperparallele le rette comprese fra le due parallele.





In termini assiomatici, la geometria iperbolica sostituisce al V postulato un'altra proposizione, detta assioma di Lobačevskij: "Dati in un piano una retta ed un punto esterno, per il punto passano almeno due rette che non incontrano la retta data". Queste due rette sono le parallele, ed ogni retta, per un punto esterno, ha una retta parallela in un verso ed una parallela nell'altro. Verranno ora enunciate alcune proprietà: per semplicità, sono omesse le dimostrazioni e alcune proprietà meno interessanti, essendo lo scopo non una trattazione dettagliata di questo sistema, ma un'esposizione delle sue particolarità.

Nel piano iperbolico esiste una figura composta da un segmento e due semirette parallele: il triangolo aperto. Questo triangolo, con un lato finito e due lati infiniti, gode di alcune proprietà, alcune delle quali simili a quelle dei classici triangoli euclidei:

- Un angolo esterno è maggiore dell'angolo esterno non adiacente
- Se due triangoli aperti hanno congruenti il lato finito e uno dei due angoli, allora hanno congruente anche l'altro angolo.
- Se due triangoli hanno congruenti gli angoli, hanno congruente anche il lato finito

Considerando una retta r, una sua parallela per P, ed il segmento PH perpendicolare a r, chiamando α l'angolo di parallelismo, si può osservare, applicando le proprietà del triangolo aperto, che il valore di α non è costante, ma dipende strettamente dalla lunghezza di PH. Esiste una funzione univoca $\Pi(p)$ per cui, $\alpha=\Pi(p)$. Dunque, se il valore degli angoli è in qualche modo 'assoluto', poiché sono confrontabili con l'angolo giro, questa proprietà può essere fatta ricadere, nella geometria iperbolica, anche sui segmenti. Si dimostra, inoltre, che a un segmento p più corto corrisponde un angolo α più ampio.

Nel piano iperbolico non esistono criteri di similitudine (simili sono figure 'in scala', che hanno gli angoli uguali e i lati direttamente proporzionali): è infatti dimostrabile l'equivalenza fra il postulato di esistenza di triangoli simili e il V postulato. Nella geometria iperbolica, i triangoli 'in scala' non hanno angoli congruenti, e triangoli con gli angoli congruenti possono essere soltanto congruenti. Valgono invece i tre criteri di congruenza dei triangoli, che sono dimostrati da Euclide senza ricorrere al V postulato. A questi si aggiunge un quarto criterio di congruenza: "due triangoli che hanno i tre angoli congruenti sono congruenti".

Nella geometria iperbolica, la somma degli angoli interni di un triangolo non è né uguale a due retti (come nella geometria euclidea), né costante. È sempre minore di due retti, ragion per cui si può considerare una grandezza, il difetto angolare, equivalente alla differenza fra la somma degli angoli interni e 180 gradi. Riguardo questa grandezza, si dimostra che "se un triangolo è suddiviso in più triangoli in un modo qualsiasi, il difetto angolare del triangolo è uguale alla somma dei difetti angolari dei triangoli della suddivisione". Questo, indicativamente, ci dice che tanto più è 'grande' il triangolo, tanto maggiore sarà il difetto angolare. Viceversa, tanto più piccolo il triangolo, tanto minore il difetto angolare. Più precisamente, si può dimostrare che "dato un angolo ε arbitrariamente piccolo, esiste un segmento h tale che se tutti i lati di un triangolo sono minori di h, il suo difetto angolare è minore di ε".

È interessante studiare le proprietà che si verificano in una sezione estremamente piccola del piano iperbolico. Nei triangoli, il difetto angolare si fa sempre più piccolo, per cui si può dire che la somma degli angoli interni di un triangolo tende a due retti. Considerando poi la relazione fra distanza p del punto per cui passa la parallela dalla retta e angolo di parallelismo, possiamo dire che, dato che al diminuire di p aumenta $\alpha=\Pi(p)$, per p molto piccolo, α tende a 90 gradi.

Se nelle zone 'estremamente piccole' del piano iperbolico i triangoli hanno la somma degli angoli interni simile a due retti, e l'angolo di parallelismo è simile a 90 gradi, possiamo dire che, da un punto di vista empirico, in zone molto piccole del piano iperbolico vale la geometria euclidea. Tuttavia, ci è impossibile definire oltre quale soglia ciò avvenga; si potrebbe ipotizzare per esempio che per triangoli di lati paragonabili alla distanza fra il Sole e Nettuno si abbia un difetto angolare di un grado sessagesimale: in tal caso, i triangoli da noi disegnati sarebbero probabilmente indistinguibili da quelli euclidei, anche se ci trovassimo in un 'universo iperbolico'.

È possibile espandere la geometria iperbolica, scoprendo in essa la presenza di una figura geometrica inesistente nella geometria euclidea (l'oriciclo, definibile come un cerchio di raggio infinito). Considerando poi non più un piano iperbolico, ma uno spazio iperbolico, è possibile sviluppare la trigonometria iperbolica e, grazie a questa, esplicitare la funzione che lega angolo di parallelismo e lunghezza di PH, procedimento seguito da Bolyai:

$$tg\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{p}{k}}$$

dove k è una costante che indica la distanza fra due oricicli concentrici per cui il rapporto dei loro archi corrispondenti è uguale ad e. Questa costante non ha un valore prestabilito, e al variare del suo valore varia il sistema iperbolico considerato. In particolare, facendo tendere k ad infinito, si evince che, in questo caso, la tangente deve essere sempre uguale a zero, per cui l'angolo di parallelismo è un angolo retto indipendentemente dalla distanza della parallela. Dunque, si ricade nel caso della geometria euclidea: la geometria iperbolica è 'generale' e la geometra euclidea può essere vista come un caso particolare di questa.

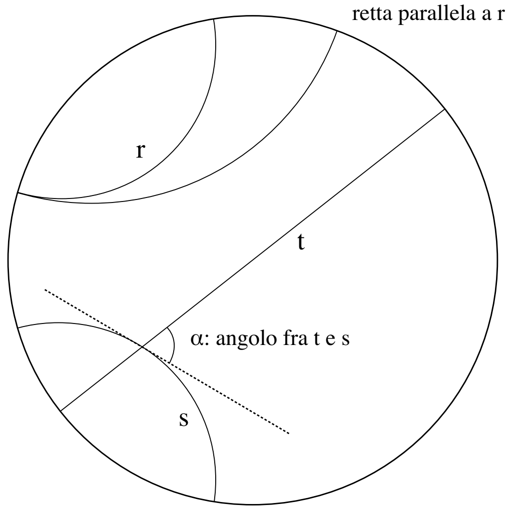
Metodi di rappresentazione delle geometrie non euclidee

La geometria iperbolica non è un piccolo insieme di curiosità sviluppate come esercizio mentale: è invece un sistema geometrico completo e profondo, paragonabile a quello euclideo. Tuttavia, la sua 'stranezza' ha fatto dubitare molti della sua effettiva legittimità, facendo supporre i detrattori del sistema che, prima o poi, si sarebbe trovata una falla che ne provasse la contraddittorietà. E se trovare una contraddizione è sufficiente per dimostrare la contraddittorietà di un sistema, dimostrarne la non contraddittorietà è operazione assai più complessa.

Una possibile via di uscita è l'elaborazione di un modello euclideo della geometria non euclidea: trovare una corrispondenza fra le due geometrie per cui ad ogni ente iperbolico corrisponde un ente euclideo, ad ogni postulato della geometria iperbolica corrisponde un postulato vero nella geometria euclidea, e i teoremi della geometria iperbolica sono trasformati in teoremi della geometria euclidea. La creazione di un modello del genere permette, prima di tutto, di 'vedere' la geometria iperbolica, che diventa rappresentabile sul piano (o nello spazio) euclideo; ma soprattutto permette di legare le due geometrie, dimostrando così che se la geometria iperbolica è contraddittoria, lo è anche la geometria euclidea. In questo senso non si dimostra la non contraddittorietà in assoluto, ma essendo ormai ampiamente accettata la non contraddittorietà della geometria euclidea, il risultato è comunque sufficiente per gli scopi prefissati.

Il più celebre di questi modelli prende il nome di disco di Poincaré, in onore di Henri Poincaré (1854-1912), matematico e fisico teorico francese.

Si considera nel piano euclideo un cerchio Ω di centro O e raggio r. Lo spazio che si considera è quello composto da tutti i punti interni al cerchio, escludendo la circonferenza: in questo modo, lo spazio non ha un vero e proprio limite, non esistendo un 'ultimo punto'. Nella tabella che segue verranno illustrati gli equivalenti euclidei, sul disco di Poincaré, degli enti fondamentali della geometria iperbolica.



Ω: limite del piano

Geometria Iperbolica	Disco di Poincaré
Punto	Punto interno a Ω
Retta	Diametro di Ω o arco di cerchio ortogonale a Ω con estremi su Ω ed interno ad esso
Piano	Superficie interna a Ω
Ampiezza di un angolo	Ampiezza dell'angolo fra le semirette tangenti ai lati nell'origine
Lunghezza di un segmento AB	| ln(ABUV) |, dove U e V sono i punti di Ω per cui passa AB

ABUV è detto birapporto, ed equivale al rapporto fra AU*BV e AV*BU.

Questa concezione delle lunghezze permette di far valere diverse proprietà necessarie riguardanti le lunghezze: il fatto che AB=BA e che AB+BC=AC (con A, B e C) punti di una stessa retta. Inoltre, quando A si avvicina ad U, la lunghezza tende ad infinito: in questo modo, la retta è di 'lunghezza infinita' e può essere prolungata indefinitamente pur appartenendo ad una superficie chiusa.

Due rette sono parallele quando il loro punto di intersezione appartiene ad Ω, e dunque non al piano. Quando due rette non hanno nessun punto di intersezione all'interno o su Ω, si verifica il caso delle rette iperparallele.

È possibile, facendo queste premesse, dimostrare gli assiomi di Hilbert (tranne, ovviamente, quello della parallela, di cui si dimostra il sostituto), ovvero si dimostrano, nell'ambito della geometria euclidea, le proprietà delle figure corrispondenti agli enti fondamentali della geometria iperbolica.

Per esempio, i primi due postulati di Hilbert affermano l'esistenza e l'unicità della retta per due punti. È semplice dimostrare la 'traduzione' di questi assiomi, ovvero che, dati una circonferenza Ω e due punti A e B interni ad essa, esiste ed è unico il cerchio ortogonale a Ω che passa per A e B.

Un modello analogo è costituito dal semipiano di Poincaré: il piano è l'insieme dei punti che giacciono da un lato di una certa retta r, le rette le semicirconferenze ortogonali a r. Per gli altri enti, vale la stessa traduzione, e anche in questo caso si possono dimostrare gli assiomi di Hilbert.

Uno dei punti di forza di questi due modelli è che sono estendibili alle tre dimensioni: basti considerare una sfera al posto di una circonferenza, e si può lavorare in uno spazio iperbolico, paragonandolo allo spazio euclideo, invece che considerare due sole dimensioni.

Mentre questo modello è una vera e propria "traduzione" nella geometria euclidea dei principi iperbolici, che legando in questo modo i due sistemi vuole dimostrarne l'equivalenza, altri modelli sono costruiti, con lo steso obiettivo, considerando una superficie bidimensionale piegata nelle tre dimensioni euclidee. Considerando poi come piano questa superficie, e come rette le linee geodetiche (ovvero il percorso più breve per collegare due punti), la geometria della superficie è una geometria iperbolica, ellittica, o una normale geometria euclidea a seconda della curvatura della superficie. In questo modo, un'eventuale contraddizione della geometria non euclidea si ripercuoterebbe sulla superficie e dunque sulla geometria euclidea. Questo metodo di approccio al problema fu bene esplicitato da Poincaré in *La scienza e l'ipotesi* (1902): si immaginino delle creature bidimensionali, dotate da sufficiente razionalità per elaborare dei sistemi geometrici. Si immagini che queste creature vivano su una superficie bidimensionale, che presenta tuttavia una curvatura nella terza dimensione che noi, osservatori esterni, possiamo percepire. A seconda del tipo di superficie in cui questi esseri vivono, che genere di geometria svilupperanno? Iperbolica, ellittica, o euclidea?

Di seguito lo schema di 'traduzione' dal piano ad una superficie S:

Punto	Punto di S
Retta	Geodetica
Piano	Superficie S
Ampiezza di un angolo	Ampiezza dell'angolo fra le semirette tangenti ai lati nell'origine
Lunghezza di un segmento AB	Distanza misurata lungo la geodetica

Due superfici usate in questo modo sono la sfera, per la geometria ellittica, e la 'pseudosfera' per la geometria iperbolica. Quest'ultima fu individuata come superficie sulla quale vale la geometria iperbolica da Eugenio Beltrami (1835-1900), matematico italiano che nel 1868 dimostrò come su questa superficie valga la geometria iperbolica. Questo fu il primo esempio di modello 'concreto' di superficie iperbolica; tuttavia, in seguito, si scoprì che la geometria iperbolica vale solo localmente, motivo per cui questa superficie non costituisce una prova della non contraddittorietà. Inoltre, è molto meno 'pratica' dei modelli di Poincaré.

Per quanto riguarda la geometria ellittica, il modello più celebre è quello della geometria sulla sfera: le rette sono le circonferenze massime (circonferenze con centro nel centro della sfera), i segmenti sono archi di questi segmenti, e gli angoli sono determinati dalle tangenti ai lati nel punto di origine dell'angolo.

Fisica

Il XIX secolo fu caratterizzato in fisica dallo studio dei fenomeni elettrici e magnetici. Per quanto all'inizio questi venissero affrontati col modello meccanico dell'idrodinamica (e il termine corrente elettrica ce ne è testimone), con l'introduzione da parte di Faraday del concetto di campo nel 1870 e la prova sperimentale dell'esistenza delle onde elettromagnetiche nel 1887, questa interpretazione venne abbandonata completamente. Se da una parte la verifica sperimentale delle previsioni teoriche rappresentava un grande successo, dall'altra l'incompatibilità fra elettromagnetismo e la classica meccanica Newtoniana faceva cadere la fisica in una profonda crisi. Infatti, secondo la fisica classica, la velocità è sempre relativa ad un sistema di riferimento, mentre nell'elettromagnetismo è presente la velocità della luce come costante.

Si immagini un treno in movimento che, tramite i fari, emette un raggio di luce. La velocità della luce per un osservatore fermo (*u*) dovrebbe essere diversa dalla velocità della luce per un osservatore sul treno (*u'*). Se v è la velocità del treno, dovrebbe valere che *u=u'+v*, per cui la velocità della luce, secondo la meccanica, non potrebbe essere costante, come invece è secondo l'elettromagnetismo.

Nel tentativo di risolvere questo problema si cimentarono diversi fisici, fra cui Hendrik Antoon Lorentz, che nel 1904 scrisse delle formule che mettono in relazione spazio (x), tempo (t) e velocità (u) relativi ad un'evento, considerati rispetto a due diversi osservatori, O e O', in moto relativo fra loro con una velocità v:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad u' = \frac{u - v}{\sqrt{1 - \frac{uv}{c^2}}}$$

Queste formule, riconosciute dallo stesso Lorentz come un artificio matematico, sostituendo le più più semplici e intuitive formule della fisica classica, permettono di risolvere la situazione paradossale precedentemente esposta: quando u corrisponde alla velocità della luce, u' = u. Tuttavia, Lorentz non approfondì il significato fisico di queste, cosa che fece Einstein, all'interno della celebre teoria della relatività.

La relatività ristretta considera i sistemi di riferimento non inerziali, ovvero quei sistemi di riferimento che non subiscono accelerazioni. Secondo la relatività, non si può considerare uno spazio tridimensionale ed un tempo da intendere come misura assoluta, ma si deve considerare un sistema unitario quadridimensionale formato da tre dimensioni spaziali e una temporale. Questo modello spazio-temporale è rappresentabile usando i diagrammi di Minkowski, che prendono il nome del fisico lituano che li elaborò, individuando inoltre un'invariante cronotopica, che rimane costante indipendentemente dal sistema di riferimento, così come la lunghezza di un segmento, nella fisica classica, rimane costante indipendentemente dall'osservatore. La geometria che vale nello spazio-tempo di Minkowski non è euclidea.

La relatività generale considera invece i sitemi di riferimento non inerziali, ovvero quei sistemi che subiscono un'accelerazione. Uno dei postulati alla base di questa teoria è che "in una regione spazio-temporale sufficientemente piccola esiste sempre, per quanto concerne i fenomeni fisici, un sistema di riferimento nel quale è assente ogni effetto della gravitazione". Per esempio, una persona che avrà la sfortuna di trovarsi in un ascensore in caduta libera sperimenterà le sensazioni di un astronauta in assenza di gravità; viceversa, un astronauta su un'astronave che si muove con un'accelerazione pari all'accelerazione di gravità, verrà 'spinto' per inerzia verso il pavimento e avrà delle sensazioni simili a quelle che prova sulla Terra per effetto della gravità.

Essendo che, in un sistema accelerato, la traiettoria di un raggio di luce, rispetto al sistema, è curvilinea, la luce dovrebbe subire una deviazione anche per effetto di un campo gravitazionale. Risulta strano pensare, essendo la luce priva di massa, che essa subisca gli effetti della gravità; inoltre, ciò è assolutamente contraddittorio con l'elettromagnetismo, che prevede una propagazione rettilinea della luce; essendo innegabile la veridicità dell'elettromagnetismo (dato che il campo gravitazionale della terra è troppo debole per causare significative deviazioni), molti fisici guardarono con scetticismo le teorie di Einstein, fino a quando fu verificata sperimentalmente la deviazione della luce di una stella per effetto del campo gravitazionale del Sole. La soluzione che Einstein propose fu rivoluzionaria.

Egli infatti considera possibile una curvatura dello spazio-tempo: si immagini un telo teso al centro del quale viene posizionata una sfera pesante che incurverà in telo. Se si fa scivolare lungo il telo una più piccola biglia, in prossimità della deformazione questa subirà una deviazione. Allo stesso modo, corpi di massa considerevole riescono a incurvare lo spazio-tempo.

Prima di formulare questa teoria, Einstein studiò approfonditamente in termini matematici la questione, utilizzando le geometrie non euclidee ed i concetti di curvatura e di geodetica. Dunque, se fino ad allora la gravità veniva interpretata come una forza, e i moti curvilinei - per esempio dei pianeti - come risultato di queste forze, con la relatività generale la gravità diventa una proprietà geometrica: i corpi, tra cui la luce, che sembrano descrivere traiettorie curvilinee stanno in realtà procedendo lungo le geodetiche dello spazio-tempo incurvato.

Conclusioni

Dopo aver trattato queste geometrie, e aver visto come esse non siano contraddittorie, nonostante appaiano anti intuitive, sorge quasi spontaneo chiedersi quale geometria regoli il nostro universo, ovvero quale sia la geometria 'vera'. A tal proposito, è molto interessante la risposta che dà Henri Poincaré in *La scienza e l'ipotesi*, opera in cui chiarisce la sua posizione sul reale valore del sapere matematico e scientifico:

"Poiché sono possibili parecchie geometrie, siamo sicuri che proprio la nostra sia quella vera?... Per rispondere è necessario che prima ci poniamo la domanda sulla natura degli assiomi della geometria.

Sono essi giudizi a priori come vuole Kant? In tal caso ci si imporrebbero con tale forza che sarebbe impossibile concepire il contrario e quindi potremmo costruirvi sopra un edificio teorico; non ci sarebbero in tal caso geometrie non euclidee.

Gli assiomi della geometria sono dunque verità sperimentali? [...] Ma se la geometria fosse una scienza sperimentale, non potrebbe essere una scienza esatta; sarebbe soggetta a continue revisioni [...]

Gli assiomi della geometria non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti di esperienza. Sono invece delle convenzioni; la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è guidata da fatti sperimentali, ma resta libera e non trova dei limiti che nella necessità di evitare le contraddizioni.

Per questo i postulati possono rimanere rigorosamente veri, anche se le leggi sperimentali che ne hanno determinato l'adozione fossero solo approssimative.

In altre parole, gli assiomi della geometria non sono che definizioni camuffate.

Ed allora che cosa si deve pensare del problema se la geometria euclidea è vera? Tale problema è senza senso!

Altrettanto varrebbe domandare se il sistema metrico è vero e false le misure antiche; se le coordinate cartesiane sono vere e le polari false.

Una geometria non può essere più vera di un'altra; può essere soltanto più comoda"

Si può notare come Poincaré ritenga la geometria costruita interamente in base a convenzioni. Va notato però come le convenzioni, per quanto liberamente scelte, siano da legare a fatti sperimentali; inoltre, alla fine non afferma che, in assenza di geometrie più vere di altre, ci siano geometrie più belle o più interessanti, bensì geometrie più comode, e la comodità della geometria è nella spiegazione dello spazio fisico: la domanda "che geometria regola il funzionamento dell'universo?" è da trasformare in "quale geometria dobbiamo usare per descrivere il comportamento dell'universo?".

Questa impostazione è a mio avviso l'approccio più corretto alle diverse geometrie e, più in generale, alla matematica: l'universo è una 'cosa' esterna a noi, molto più caotico e disordinato di quanto possa sembrare, di cui noi creiamo dei modelli, interni a noi, per capirlo. La matematica usata dalla fisica non ha dunque a che fare con la natura, ma con il modo in cui noi spieghiamo la natura. Dunque, a seconda di cosa stiamo trattando, le geometrie da usare sono diverse: un agricoltore che deve ritagliare il suo campo seguendo criteri più o meno ragionevoli (e i problemi scolastici di geometria fanno sembrare gli agricoltori più irragionevoli e creativi di quanto effettivamente siano) può tranquillamente utilizzare la classica geometria euclidea; chi pianifica uno spostamento su scala mondiale, invece, dovrà far ricorso alla geometria ellittica sulla sfera, motivo per cui, volando da Milano a Los Angeles, si può vedere la Groenlandia, fatto inspiegabile a chi guarda una cartina geografica piatta, ovvio per chi guarda un mappamondo; infine, si è visto come le geometrie non euclidee siano utili per interpretare alcuni fenomeni considerati nella teoria della relatività.

La matematica e la filosofia, fra gli studenti, sono le due discipline che si contendono il primato del "quando mai mi servirà 'sta roba nella vita". Riguaro la filosofia, si espresse nel '68 Gustavo Bontadini, affermando provocatoriamente che la filosofia non serve a nulla, mentre le scienze servono, servono il potere: la filosofia dunque, nella sua inutilità, è l'unico sapere veramente libero. La scienza è infatti per eccellenza quella disciplina utile che, anche nei suoi aspetti più teorici, ha un immediato rapporto con la tecnica e la praticità (per esempio, le trasmissioni satellitari non funzionerebbero senza effettuare aggiustamenti sugli orologi calcolati usando la relatività generale, settore apparentemente troppo teorico per avere un ruolo pratico nella vita comune).

La matematica, a mio avviso, si colloca a metà fra scienza e filosofia. Questa ha in comune con la scienza un metodo rigoroso che, come scrisse Nietzsche, "aiuta a diradare le nebbie della metafisica". Ma mentre la scienza è una disciplina empirica, legata dunque al mondo materiale, in continua revisione, la matematica è più intellettuale, fondata su assiomi precisi, dedotta con teoremi che conferiscono un grado di certezza e precisione ben superiore. Per questo motivo, molti filosofi hanno considerato la matematica come 'scienza per eccellenza': i Pitagorici vedevano i numeri molto legati alla verità, Platone considerava le idee legate ai numeri, e nella filosofia più moderna molti furono i filosofi-matematici che diedero contributi a entrambe le discipline (Cartesio e Leibniz sono due fra questi).

La matematica condivide con la filosofia un approccio teorico e dunque un'inutilità apparente, non avendo un immediato riscontro pratico. Ma la matematica, così come la filosofia, dalla sua inutilità trae vantaggio, perché è proprio questo che le consente una libertà nella ricerca della bellezza o di altri valori. Così la pensava il matematico inglese Godfrey Harold Hardy (1877-1947), che espresse il suo pensiero in *A Mathematician's Apology* (1940): "I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world". Va specificato che Hardy si colloca in un contesto in cui alcune teorie matematiche avevano avuto recente applicazione bellica: fu probabilmente anche l'orrore della prima guerra mondiale, in cui si videro le peggiori applicazioni della scienza, a far preferire a molti pensatori l'approccio più puro e teorico possibile.

Ma anche la matematica pura è destinata a diventare matematica applicata, prima o poi: per fare alcuni esempi, i numeri complessi furono menzionati per la prima volta da Girolamo Cardano nel XVI secolo come artificio per poter applicare le 'formule di Cardano' nella risoluzione delle equazioni di terzo grado. Oggi i numeri complessi hanno applicazioni in molti campi, fra cui la meccanica quantistica e l'ingegneria elettronica. I numeri primi, uno degli aspetti più misteriosi e affascinanti della teoria dei numeri, che furono studiati e sono tuttora studiati da numerosi matematici (fra cui lo stesso Hardy), svolgono oggi un ruolo centrale nella crittografia.

Le geometrie non euclidee sono un altro eccellente esempio di ciò: quando Lobačevskij e Bolyai decisero di analizzare approfonditamente il sistema anti intuitivo in cui la parallela non è unica, difficilmente avrebbero immaginato che i loro studi sarebbero stati applicati alla fisica.

È questo il motivo per cui trovo la matematica estremamente affascinante: da una parte, è una disciplina teorica e pura, e per questo dotata di un particolare fascino; dall'altra, è rigorosa e precisa, e le sue inevitabili ma imprevedibili applicazioni la rendono utile senza comprometterne la fondamentale bellezza.

Bibliografia

- Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria, di Evandro Agazzi e Dario Palladino, Ed. La Scuola, Brescia 1998

- A Mathematician's Apology, di Godfrey Harold Hardy, pubblicata da University of Alberta Mathematical Sciences Society (http://www.math.ualberta.ca/mss/misc/)

- http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/index.htm

- http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Apr_02/APPUNTI.HTM

- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/

- Sergio Fabbri e Mara Masini, Phoenomena LS3, Società Editrice Internazionale, Torino 2013

- Nicola Abbagnano e Giovanni Fornero, La Ricerca del Pensiero, Voll. 1A e 2B, Paravia, Torino 2012

Indice